Preddoktorski izpit

14. decembra 2015

Čas reševanja je 150 minut. Vsaka naloga se oceni z 0, 1, 2 ali 3 točkami. Za pozitivno oceno morate doseči vsaj 15 točk. Če ni izrecno povedano, morate vse odgovore utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (3 točke)

Ali je vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

konvergentna? Odgovor utemelji!

2. naloga (3 točke)

Naj bo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, katere odvod je različen od 0 na celotnem intervalu. Ali f nujno zavzame globalna ekstrema na tem intervalu? V katerih točkah lahko zavzame globalna ekstrema?

3. naloga (3 točke)

Naj bosta V_1 in V_2 podprostora vektorskega prostora V. Dokaži, da je njuna unija $V_1 \cup V_2$ vektorski prostor le tedaj, ko je $V_1 \subseteq V_2$ ali $V_2 \subseteq V_1$.

4. naloga (3 točke)

Naj bosta f in g funkciji iz množice S v množico S. Denimo, da je $f \circ g = \mathrm{id}$. Dokaži, da je v primeru, ko je S končna množica, tudi $g \circ f = \mathrm{id}$. S primerom pokaži, da za neskončne množice ta sklep ne velja.

5. naloga (3 točke)

Naj bo $f(x) = 1 - x - \cos x + \sin x$. Dokaži:

1. funkcija f ima vsaj eno ničlo na $(0, 2\pi)$;
2. funkcija f ima natanko eno ničlo na $(0, 2\pi)$.

6. naloga (3 točke)

Naj bo A kompleksna matrika velikosti $n \times n$. Dokaži, da iz $A^{n+1} = 0$ sledi $A^n = 0$.

7. naloga (3 točke)

Reši *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. Ali je polinom X^3-3 nerazcepen kot element kolobarja $\mathbb{Q}[X]$? Kaj pa kot element kolobarja $\mathbb{R}[X]$?
2. Želeli bi tlakovati pravokotna tla dimenzije $2 \times n$ s tlakovci dveh vrst: kvadrati dimenzije 2×2 in pravokotniki dimenzije 1×2 (tlakovce lahko poljubno vrtiš). Na koliko načinov lahko to storiš? Če ne najdeš splošnega odgovora, reši nalogo za $n = 12$.
3. Študent na izpitu odgovarja na deset vprašanj, kjer obkroži eno od štirih možnosti. Na pet vprašanj zna odgovoriti, pri dveh zna prepoznati dva napačna odgovora, pri treh vprašanjih pa ne ve nič. Kolikšno je pričakovano število pravilnih odgovorov študenta? Kolikšna je verjetnost, da odgovori pravilno na natanko 9 vprašanj?

8. naloga (3 točke)

Reši *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. Naj bo $f_n\colon [0,1] \to [1,2]$ zaporedje linearnih funkcij. Dokaži, da obstaja podzaporedje, ki konvergira enakomerno na intervalu $[0,1]$.
2. Oglej si spodnja rekurzivna programa, ki oba definirata isto matematično funkcijo.

   ```
   foo1(x) =  če x==1 potem 1 sicer foo1(x div 2) + foo1(x div 2)
   foo2(x) =  če x==1 potem 1 sicer 2 * foo2(x div 2)
   ```

   Tu `==` testira enakost, medtem ko je `div` funkcija celoštevilskega deljenja, $m, n \mapsto \lfloor m/n \rfloor$, ki vrne celi del količnika in zavrže neceli del.

   (a) Napiši nerekurzivno formulo za matematično funkcijo, ki za pozitivna naravna števila iz $\mathbb{N}^+$ vrne rezultat zgornjih foo funkcij.

   (b) Pod predpostavko, da so funkcijski klici implementirani naivno (brez memoizacije) zapiši nerekurzivni formuli za funkciji $t_1, t_2 : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$, kjer $t_1(n)$ prešteje število funkcijskih klicev pri izvedbi `foo1`(n) in $t_2(n)$ prešteje število funkcijskih klicev pri izvedbi `foo2`(n).
3. Vržemo dve kocki. Dogodek A je "Prva kocka je pokazala sodo pik", dogodek B "Druga kocka je pokazala sodo pik" in dogodek C "Vsota pik je soda". So ti dogodki neodvisni?

9. naloga (3 točke)

Reši *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. Dokaži, da je s predpisom
$$d(A,B) = \operatorname{rang}(A - B)$$
definirana metrika na množici vseh matrik velikosti $m \times n$.

2. Za naravni števili n in k naj bo $c(n,k)$ število tistih permutacij množice $\{1, 2, \ldots, n\}$, ki jih lahko zapišemo kot produkt natanko k disjunktnih ciklov (pri čemer štejemo tudi cikle dolžine 1). Najdi eksplicitni formuli za $c(n,1)$ in $\sum_{k=1}^{n} c(n,k)$ ter rekurzivno formulo, ki izrazi $c(n,k)$ s pomočjo n, k, $c(n-1,k-1)$ in $c(n-1,k)$.

3. Naj bosta $T \overset{(d)}{=} Exp(\lambda)$ in $S \overset{(d)}{=} Exp(\mu)$ neodvisni slučajni spremenljivki. Izračunaj gostoto spremenljivke $T + S$, ko je:
   (a) $\lambda \neq \mu$;
   (b) $\lambda = \mu$.

10. naloga (3 točke)

Reši *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. Vektorski prostor P vseh polinomov z realnimi koeficienti opremimo z normo
$$||p|| = \max_{0 \leq x \leq 1} |p(x)|.$$
Ali je preslikava $D\colon P \to P,\ D(p) = p'$ zvezna glede na to normo?

2. Za *nedeterministični* Turingov stroj N pravimo, da *sprejme* vhodni podatek, brž ko obstaja vsaj ena izvedba programa, ki se konča v stanju *sprejmi*. Ali lahko konstruiramo *deterministični* Turingov stroj M, ki sprejme isto množico vhodnih podatkov kot N? Odgovor utemelji!

3. Slučajna spremenljivka ima gostoto $\frac{x}{2}\mathbf{1}_{[0,2]}(x)$.
   (a) Kolikšna je verjetnost, da se bo razlikovala od svoje pričakovane vrednosti za manj, kot je njena standardna deviacija?
   (b) Isto vprašanje, če zamenjaš pričakovano vrednost z mediano.