Preddoktorski izpit

22. maj 2015

Čas reševanja je 180 minut. Vsaka naloga se oceni z 0, 1, 2 ali 3 točkami. Za pozitivno oceno morate doseči vsaj 15 točk. Če ni izrecno povedano, morate vse odgovore utemeljiti. Veliko uspeha!

1. naloga (3 točke)

Žogo spustimo z višine 1 m, da se odbija od tal. Kolikšna je skupna pot, ki jo prepotuje žoga, če se pri vsakem odboju dvigne na dve tretjini prejšnje višine?

2. naloga (3 točke)

Ali je število $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ racionalno?

3. naloga (3 točke)

Naj bo V vektorski prostor realnih polinomov stopnje ≤ 3. Zapišite primer linearne preslikave ranga 2 iz V v vektorski prostor $\mathbb{R}^3$. Koliko je dimenzija njenega jedra?

4. naloga (3 točke)

Dokažite, da ima vsak realni polinom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sode stopnje *globalni* ekstrem.

5. naloga (3 točke)

Naj bo $n \geq 2$ in M_n vektorski prostor vseh realnih matrik velikosti $n \times n$. Ali je podmnožica $\{A \in M_n \mid A^2 = 0\}$ njegov podprostor?

6. naloga (3 točke)

Med vsemi odvedljivimi funkcijami $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, za katere velja $f(0) = 0$ in $f(1) = 1$, poiščite tisto, pri kateri je vrednost $\sup_{x \in (0,1)} |f'(x)|$ najmanjša.

7. naloga (3 točke)

Rešite *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. Slučajna spremenljivka T je porazdeljena eksponentno s parametrom λ. Brez integriranja izrazite matematično upanje $E(T \mid T \leq a)$ za $a > 0$ s pomočjo $E(T)$.
2. Zapišite zaporedje zveznih funkcij $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, da bo imela vsaka od njih maksimalno vrednost 1, po točkah pa bodo konvergirale k ničelni funkciji.
3. Pravimo, da je tabela $[a_1, \ldots, a_n]$ *permutacija*, če se v njej vsako od števil $1, \ldots, n$ pojavi natanko enkrat. Zapišite *čim bolj učinkovit* algoritem ali program, ki ugotovi, ali je dana tabela celih števil permutacija, ter ugotovite njegovo časovno zahtevnost v odvisnosti od velikosti tabele.

8. naloga (3 točke)

Rešite *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. Naj bosta A in B disjunktna dogodka. Kolikšna je verjetnost, da se v neskončnem zaporedju neodvisnih ponovitev poskusa dogodek A zgodi pred dogodkom B?

2. Ali je preslikava $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dana s predpisom

$$f(x, y) = (x^2 + y + 1, x^4 + y^2 + x),$$

   skrčitev glede na evklidsko metriko na $\mathbb{R}^2$? Nauk: preslikava f je skrčitev, če obstaja število $0 \leq \lambda < 1$, da je $\|f(u) - f(v)\| \leq \lambda \cdot \|u - v\|$ za vse $u, v \in \mathbb{R}^2$.

3. Dana je funkcija

```
def f(n, k):
  if n == 0: return 0
  else: return (f(n // k, k) + (n % k))
```

   pri čemer je `a // b` celoštevilsko deljenje in `a % b` ostanek pri deljenju `a` z `b` (na primer: `13 // 5` je enako `2` in `13 % 5` je enako `3`).

   (a) Kaj izračuna `f(n,k)` za celi števili `n` ≥ 0 in `k` ≥ 2?

   (b) Koliko seštevanj izvede klic funkcije `f(n,k)` v odvisnosti od `n` in `k`? (Uporabiti smete notacijo "veliki O".)

9. naloga (3 točke)

Rešite *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. Slučajna spremenljivka N je porazdeljena Poissonovo s parametrom λ. Če je $N = n \in \mathbb{N}$, kovanec mečemo n-krat.

   (a) Kako je porazdeljeno število cifer?

   (b) Recimo, da smo tako dobili k cifer. Kakšna je pogojna porazdelitev izidov N?

2. Dokažite, da je grupa G Abelova, če za vse $x, y \in G$ velja $(xy)^2 = x^2y^2$. Nato ugotovite, ali za vse grupe G in vse $n \geq 2$ velja sklep: če za vse $x, y \in G$ velja $(xy)^n = x^ny^n$, potem je G Abelova.

3. Na začetku imamo 0 točk ter neomejeno zalogo ploščic s številom 2. Dve ploščici z enakim številom a lahko združimo v eno ploščico s številom $2a$ in pri tem dobimo dodatnih $2a$ točk. Na primer, dve ploščici s številom 16 lahko zamenjamo za eno ploščico s številom 32 in pri tem dobimo še 32 točk. Najmanj koliko točk imamo, ko imamo v lasti ploščico s številom 2^k?

10. naloga (3 točke)

Rešite *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. Obravnavamo poskus, v katerem so vsi izidi enako verjetni. Naj bo S množica izidov z $n \geq 4$ elementi, $K \subseteq S$ s $k \geq 3$ elementi in $a \in K$. Z X_a označimo slučajno spremenljivko, ki pove, koliko izidov iz K se še ni zgodilo v hipu, ko se je v zaporedju neodvisnih ponovitev poskusa prvič zgodil izid a. Izračunajte verjetnost $P(X_a = \ell)$ za $0 \leq \ell \leq k-1$.

2. Poiščite vse četverice števil $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ki zadoščajo naslednjemu pogoju: za vsako neskončnokrat odvedljivo funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in za vsak $x \in \mathbb{R}$ obstaja limita
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + a \cdot h) + b \cdot f(x+h) + c \cdot f(x)}{h^d}$$
in njena vrednost je enaka nekemu višjemu odvodu $f^{(k)}(x)$ v točki x za $k \geq 0$. Nauk: $f^{(k)}$ je k-ti odvod funkcije f, pri čemer je $f^{(0)} = f$.

3. Dokažite, da za vsako naravno število n obstaja enostaven graf na $4n$ vozliščih, ki je izomorfen svojemu komplementu.