Preddoktorski izpit

20. marca 2017

Čas reševanja je 150 minut. Vsaka naloga se oceni z 0, 1, 2 ali 3 točkami. Za pozitivno oceno morate doseči vsaj 15 točk. Če ni izrecno povedano drugače, morate vse odgovore utemeljiti. Veliko uspeha!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (3 točke)

Poiščite vsa taka praštevila p, da je število $7p + 4$ kvadrat kakega naravnega števila.

2. naloga (3 točke)

Naj bo n poljubno naravno število. Poiščitete vse realne zgornje trikotne matrike X, za katere je

$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. naloga (3 točke)

Funkcija f je definirana za nenegativna cela števila a, b in n rekurzivno s predpisom

$$f(a,b,n) = \begin{cases} a & \text{če je } n = 0, \\ f(a, b^2, n/2) & \text{če je } n \text{ pozitiven in sod}, \\ f(ab, b^2, (n-1)/2) & \text{če je } n \text{ lih}. \end{cases}$$

Kaj izračuna $f(a, b, n)$? Odgovor dokažite!

4. naloga (3 točke)

Naj bo x element obsega O, različen od 0 in 1. Pokažite, da je

$$x^2 = x - \left(x^{-1} + (1-x)^{-1}\right)^{-1}.$$

5. naloga (3 točke)

Dokažite ali ovrzite naslednjo trditev:

Naj bo funkcija $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna in absolutno integrabilna. Tedaj je f^2 absolutno integrabilna na $[1, \infty)$.

6. naloga (3 točke)

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s predpisom

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \int_0^x \exp(-t^2)dt.$$

Dokažite, da ima f natanko eno ničlo na intervalu $[0, 1]$.

7. naloga (3 točke)

Rešite *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. Naj bo karakteristika kolobarja K praštevilo p. Pokažite, da element $a \in K$ zadošča $a^p = 1$ natanko tedaj, ko obstaja tak $b \in K$, da je $a = 1 + b$ in $b^p = 0$. Spomnimo se, da je karakteristika kolobarja K najmanjše tako naravno število n, da za vsak $x \in K$ velja

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = 0.$$

2. Spodnja rekurzivna formula določa funkcijo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (kjer $\mathbb{N}$ označuje množico nenegativnih celih števil).

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & ; \text{če } x \leq 1 \\ 2f(x-2) + f(x-1) + 1 & ; \text{če } x \geq 2 \end{cases}$$

   (a) Dokažite, da čas izvajanja naivne rekurzivne implementacije funkcije f za izračun $f(n)$ raste ekponentno z n.

   (b) Pojasnite, kako lahko $f(n)$ izračunamo v linearnem času glede na n (pod predpostavko, da so aritmetične operacije na naravnih številih izračunljive v konstantnem času).

3. Pri predmetu Verjetnost je $n > 0$ študentov. Za pozitivno oceno mora študent najprej opraviti pisni izpit, nato pa še ustnega. Verjetnost, da opravi pisni izpit, je p_1 in verjetnost, da opravi ustni izpit, če gre lahko nanj, p_2, za vse študente enako in neodvisno. Naj bo X število študentov, ki opravijo pisni izpit in Y število tistih, ki dobijo pozitivno oceno. Izračunajte kovarianco $Cov(X, Y)$ in pogojno verjetnost $P(X = n|Y = k)$.

8. naloga (3 točke)

Rešite *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. Utemeljite odgovor na naslednje vprašanje: Ali ima enotska krožnica kot krivulja v $\mathbb{R}^2$ polinomsko parametrizacijo? Če jo ima, jo poiščite.
2. Vprašanje, ali je $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, je slaven nerešen problem teoretičnega računalništva.
   (a) Neformalno definirajte, kaj simbola P in NP v tej enakosti označujeta.
   (b) Za eno od vsebovanosti $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$ in $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}$ je znano, da drži. Katera od teh vsebovanosti je to? Podajte njen neformalni dokaz, upoštevajoč vašo definicijo simbolov P in NP iz zgornje točke.
3. Izračunajte pričakovano število metov kovanca do trenutka ko:
   (a) prvič padeta dve cifri zapored,
   (b) prvič pade cifra za grbom.

9. naloga (3 točke)

Rešite *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. Naj za funkcijo $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ obstajata konstanti $M > 0$ in $\alpha > 1$, da je

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha} \text{ za vse } x, y \in [0,1].$$

   Dokažite, da je f konstantna.

2. Za naravni števili n in r, takšni da je $r \leq n$, dokažite enakost

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{r} = 2^{n-r}\binom{n}{r}.$$

3. Žarnice so bodisi tipa S, če je njihova življenska doba porazdeljena $Exp(2\lambda)$, ali tipa N, če je njihova življenska doba porazdeljena kot $\min\{Exp(\lambda), d\}$.

   (a) Določite d tako, da bosta pričakovani življenski dobi obeh tipov enaki.

   (b) Denimo, da slučajno izberemo žarnico, pri čemer sta oba tipa enako verjetna. Kolikšna je verjetnost, da bo gorela dlje, kot je njena pričakovana življenska doba? Če je tako izbrana žarnica gorela dlje, kot je njena pričakovana življenska doba, kolikšna je verjetnost, da je bila izbrana žarnica tipa S?

10. naloga (3 točke)

Rešite *natanko eno* od naslednjih nalog.

1. S pomočjo izreka o Jordanovi normalni obliki matrik dokažite, da kompleksni matriki A in B velikosti 2×2 komutirata natanko tedaj, ko so matrike A, B in I linearno odvisne.

2. Pobarvaj točke ravnine $\mathbb{R}^2$ z barvami iz končne množice A. Dokažite, da za vsako pozitivno realno število ϵ obstaja pravokotnik ploščine največ ϵ s stranicami vzporednimi koordinatnim osem, katerega vsa štiri oglišča so pobarvana z isto barvo.

3. Iz žare, v kateri je a belih, b rdečih in c črnih kroglic, žrebamo z vračanjem. Izračunajte pričakovano število belih kroglic, ki jih izžrebamo do takrat, ko k-tič izžrebamo črno kroglico.